

13.1

- a) Jos tapahtuma A : ”kahdesta vapaaheitosta kumpikaan ei mene koriin” ei toteudu, ainakin toinen vapaaheitoista menee koriin.

Tapahtuman A vastatapahtuma on

\bar{A} : ”kahdesta vapaaheitosta ainakin toinen menee koriin”.

- b) Jos tapahtuma B : ”ainakin yksi luokan oppilaista myöhästyy” ei toteudu, kukaan luokan oppilaista ei myöhästyy.

Tapahtuman B vastatapahtuma on

\bar{B} : ”kukaan luokan oppilaista ei myöhästyy”.

- c) Jos tapahtuma C : ”kaikki neljä jalankulkuvaloa ovat vihreällä” ei toteudu, ainakin yksi jalankulkuvaloista on punaisella.

Tapahtuman C vastatapahtuma on

\bar{C} : ”neljästä jalankulkuvalosta ainakin yksi on punaisella”.

13.2

Tapahtuma A : ”viidellä heitolla tulee ainakin yksi klaava” tarkoittaa, että klaavoja saadaan 1, 2, 3, 4 tai 5. Yksinkertaisempaa on laskea vastatapahtuman \bar{A} : ”viidellä heitolla ei saada yhtään klaavaa” todennäköisyys.

Lasketaan vastatapahtuman \bar{A} todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= P(\text{viidellä heitolla ei saada yhtään klaavaa}) \\ &= P(1. \text{ ei ole klaava ja } 2. \text{ ei ole klaava ja } \dots \text{ ja } 5. \text{ ei ole klaava}) \\ &= P(1. \text{ ei ole klaava}) \cdot P(2. \text{ ei ole klaava}) \cdot \dots \cdot P(5. \text{ ei ole klaava}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}^5 \end{aligned}$$

Lasketaan tapahtuman A todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\ &= 1 - \frac{1}{2}^5 \\ &\approx 0,969 \end{aligned}$$

Vastaus

0,969

13.3

- a) Tapahtuma A : ”ainakin yksi menee koriin” tarkoittaa, että koreja saadaan yksi, kaksi tai kolme. Yksinkertaisempaa on laskea vastatapahtuman \bar{A} : ”kolmella heitolla ei saada yhtään koria” todennäköisyys.

Lasketaan vastatapahtuman \bar{A} todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(\bar{A}) &= P(\text{kolmella heitolla ei saada yhtään koria}) \\&= P(1. \text{ ei koria ja } 2. \text{ ei koria ja } 3. \text{ ei koria}) \\&= P(1. \text{ ei koria}) \cdot P(2. \text{ ei koria}) \cdot P(3. \text{ ei koria}) \\&= 0,20 \cdot 0,20 \cdot 0,20 \\&= 0,20^3\end{aligned}$$

Lasketaan tapahtuman A todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\&= 1 - 0,20^3 \\&\approx 0,99\end{aligned}$$

- b) Tapahtuma B : ”kaikki eivät mene koriin” tarkoittaa, että koreja ei saada yhtään tai niitä saadaan yksi tai kaksi. Yksinkertaisempaa on laskea vastatapahtuman \bar{B} : ”kaikilla kolmella heitolla saadaan kori” todennäköisyys.

Lasketaan vastatapahtuman \bar{B} todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(\bar{B}) &= P(\text{kaikilla kolmella heitolla saadaan kori}) \\&= P(1. \text{ kori ja } 2. \text{ kori ja } 3. \text{ kori}) \\&= P(1. \text{ kori}) \cdot P(2. \text{ kori}) \cdot P(3. \text{ kori}) \\&= 0,80 \cdot 0,80 \cdot 0,80 \\&= 0,80^3\end{aligned}$$

Lasketaan tapahtuman B todennäköisyys.

$$P(B) = 1 - P(\overline{B})$$

$$= 1 - 0,80^3$$

$$\approx 0,49$$

Vastaus

a) 0,99

b) 0,49

13.4

Tapahtuma A : ”Maria joutuu pysähtymään ainakin kerran” tarkoittaa, että Maria joutuu pysähtymään ensimmäisissä, toisissa tai molemmissa valoissa. Yksinkertaisempaa on laskea vastatapahtuman \bar{A} : ”Maria ei joudu pysähtymään kertaakaan” todennäköisyys.

Ensimmäiset valot näyttävät punaista todennäköisyydellä 0,70, joten ne näyttävät vihreää todennäköisyydellä 0,30.

Toiset valot näyttävät punaista todennäköisyydellä 0,60, joten ne näyttävät vihreää todennäköisyydellä 0,40.

Lasketaan vastatapahtuman \bar{A} todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= P(\text{Maria ei joudu pysähtymään kertaakaan}) \\ &= P(\text{vihreä 1. valoissa ja vihreä 2. valoissa}) \\ &= P(\text{vihreä 1. valoissa}) \cdot P(\text{vihreä 2. valoissa}) \\ &= 0,30 \cdot 0,40 \end{aligned}$$

Lasketaan tapahtuman A todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\ &= 1 - 0,30 \cdot 0,40 \\ &= 0,88 \end{aligned}$$

Vastaus

0,88

13.5

Tapahtuma A : ”ainakin yksi seitsemästä on sunnuntailapsi” kannattaa laskea vastatapahtuman \bar{A} : ”yksikään seitsemästä ei ole sunnuntailapsi” avulla.

Todennäköisyys, että henkilö ei ole syntynyt sunnuntaina, on $\frac{6}{7}$.

Lasketaan vastatapahtuman \bar{A} todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= P(\text{yksikään seitsemästä ei ole sunnuntailapsi}) \\ &= P(1. \text{ ei sunnuntailapsi ja } 2. \text{ ei sunnuntailapsi ja } \dots \text{ ja } 7. \text{ ei sunnuntailapsi}) \\ &= P(1. \text{ ei sunnuntailapsi}) \cdot P(2. \text{ ei sunnuntailapsi}) \cdot \dots \cdot P(7. \text{ ei sunnuntailapsi}) \\ &= \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \\ &= \left(\frac{6}{7}\right)^7 \end{aligned}$$

Lasketaan tapahtuman A todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\ &= 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^7 \\ &\approx 0,660 \end{aligned}$$

Vastaus

0,660

13.6

- a) Katiskasta saa kalan todennäköisyydellä 0,24, joten kalaa ei saa todennäköisyydellä 0,76.

Lasketaan todennäköisyys tapahtumalle "ei saa yhtään kalaa".

$$\begin{aligned} &P(\text{ei yhtään kalaa}) \\ &= P(1. \text{ ei kalaa ja } 2. \text{ ei kalaa ja } 3. \text{ ei kalaa ja } 4. \text{ ei kalaa}) \\ &= P(1. \text{ ei kalaa}) \cdot P(2. \text{ ei kalaa}) \cdot P(3. \text{ ei kalaa}) \cdot P(4. \text{ ei kalaa}) \\ &= 0,76 \cdot 0,76 \cdot 0,76 \cdot 0,76 \\ &= 0,76^4 \\ &\approx 0,33 \end{aligned}$$

- b) Lasketaan todennäköisyys tapahtumalle "saa kaikista kalan".

$$\begin{aligned} &P(\text{saa kaikista kalan}) \\ &= P(1. \text{ kala ja } 2. \text{ kala ja } 3. \text{ kala ja } 4. \text{ kala}) \\ &= P(1. \text{ kala}) \cdot P(2. \text{ kala}) \cdot P(3. \text{ kala}) \cdot P(4. \text{ kala}) \\ &= 0,24 \cdot 0,24 \cdot 0,24 \cdot 0,24 \\ &= 0,24^4 \\ &\approx 0,0033 \end{aligned}$$

- c) Tapahtuman A : "saa ainakin yhden kalan" todennäköisyys kannattaa lasketa vastatapahtuman \bar{A} : "ei saa yhtään kalaa" avulla.

Vastatapahtuman \bar{A} todennäköisyys

$$P(\bar{A}) = P(\text{ei yhtään kalaa}) = 0,76^4$$

Lasketaan tapahtuman A todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\ &= 1 - 0,76^4 \\ &\approx 0,67 \end{aligned}$$

- d) Tapahtuma B : ”saa ainakin kaksi kalaa” tarkoittaa, että kaloja saadaan kaksi, kolme tai neljä. Yksinkertaisempaa on laskea vastatapahtuman \bar{B} : ”saadaan korkeintaan yksi kala” todennäköisyys.

Tapahtuma ”saadaan korkeintaan yksi kala” koostuu neljästä erillisestä tapahtumasta:

”ei saada yhtään kalaa” = ”E E E E”

”saadaan kala vain 1. katiskasta” = ”K E E E”

”saadaan kala vain 2. katiskasta” = ”E K E E”

”saadaan kala vain 3. katiskasta” = ”E E K E”

”saadaan kala vain 4. katiskasta” = ”E E E K”

Todennäköisyys, että saadaan kala vain 1. katiskasta on

$$P(K E E E) = 0,24 \cdot 0,76 \cdot 0,76 \cdot 0,76 = 0,24 \cdot 0,76^3.$$

Sama todennäköisyys on myös saada kala vain 2. katiskasta, 3. katiskasta tai 4. katiskasta.

Lasketaan vastatapahtuman \bar{B} todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\bar{B}) &= P(\text{saadaan korkeintaan yksi kala}) \\ &= P(E E E E \text{ tai } K E E E \text{ tai } E K E E \text{ tai } E E K E \text{ tai } E E E K) \\ &= P(E E E E) + P(K E E E) + P(E K E E) + P(E E K E) + P(E E E K) \\ &= 0,76^4 + 4 \cdot 0,24 \cdot 0,76^3 \end{aligned}$$

Lasketaan tapahtuman B todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P(\bar{B}) \\ &= 1 - 0,76^4 + 4 \cdot 0,24 \cdot 0,76^3 \\ &\approx 0,24 \end{aligned}$$

Vastaus

- a) 0,33
- b) 0,0033
- c) 0,67
- d) 0,24

13.7

Tutkitaan tilannetta vastatapahtuman avulla. Tapahtuman A : ”ainakin yksi tavataan myöhemmin” vastatapahtuma on \bar{A} : ”yhtään ei tavata myöhemmin”.

Todennäköisyys, että rengastettua pajulintua ei tavata myöhemmin, on $1 - 0,001 = 0,999$.

Jos rengastetaan n pajulintua, niin todennäköisyys, että yhtään niistä ei tavata, on $\underbrace{0,999 \cdot 0,999 \cdot \dots \cdot 0,999}_{n \text{ kappaletta}} = 0,999^n$.

Muodostetaan lauseke tapahtuman ”ainakin yksi tavataan myöhemmin” todennäköisyydelle.

$$\begin{aligned} P(\text{ainakin yksi}) &= 1 - P(\text{ei yhtään}) \\ &= 1 - 0,999^n \end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, millä pajulintujen määrällä n todennäköisyys on 0,90.

$$\begin{aligned} P(\text{ainakin yksi}) &= 0,90 \\ 1 - 0,999^n &= 0,90 \\ n &\approx 2301,4 \end{aligned}$$

Pyöristetään ylöspäin kokonaisiksi pajulinnuiksi, koska selvitetään todennäköisyyttä, että ainakin yksi tavataan.

Vastaus

vähintään 2303 pajulintua

13.8

Tapahtuman A : ”neljällä heitolla saadaan ainakin yksi kuutonen”
kannattaa laskea vastatapahtuman \bar{A} : ”neljällä heitolla ei saada yhtään kuutosta” avulla.

Todennäköisyys, ettei yksittäisellä heitolla saada kuutosta, on $\frac{5}{6}$.

Lasketaan vastatapahtuman \bar{A} todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(\bar{A}) &= P(\text{neljällä heitolla ei saada yhtään kuutosta}) \\&= P(1. \text{ ei kuutonen ja } 2. \text{ ei kuutonen ja } \dots \text{ ja } 4. \text{ ei kuutonen}) \\&= P(1. \text{ ei kuutonen}) \cdot P(2. \text{ ei kuutonen}) \cdot \dots \cdot P(4. \text{ ei kuutonen}) \\&= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \\&= \frac{5}{6}^4\end{aligned}$$

Lasketaan tapahtuman A todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\&= 1 - \frac{5}{6}^4 \\&\approx 0,518\end{aligned}$$

Tapahtuman ”neljällä heitolla saadaan ainakin yksi kuutonen” puolesta kannattaa lyödä vetoa, koska todennäköisyys on yli 0,5.

Vastaus
kannattaa

13.9

Tapahtuman A : ”matkustajien joukossa on ainakin yksi lääkäri” kannattaa laskea vastatapahtuman \bar{A} : ”matkustajien joukossa ei ole yhtään lääkäriä” avulla.

Todennäköisyys, että yksittäinen henkilö ei ole lääkäri, on $\frac{259}{260}$.

Lasketaan vastatapahtuman \bar{A} todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= P(\text{ei yhtään lääkäriä}) \\ &= P(1. \text{ ei lääkäri ja } 2. \text{ ei lääkäri ja } \dots \text{ ja } 150. \text{ ei lääkäri}) \\ &= P(1. \text{ ei lääkäri}) \cdot P(2. \text{ ei lääkäri}) \cdot \dots \cdot P(150. \text{ ei lääkäri}) \\ &= \left(\frac{259}{260}\right)^{150} \end{aligned}$$

Lasketaan tapahtuman A todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\ &= 1 - \left(\frac{259}{260}\right)^{150} \\ &\approx 0,439 \end{aligned}$$

Vastaus

0,439

13.10

Tapahtuman A : ”eri mieltä” kannattaa laskea vastatapahtuman \bar{A} : ”samaa mieltä” avulla.

Tapahtuma ”samaa mieltä” muodostuu kolmesta erillisestä tapahtumasta: ”molemmat kannattavat”, ”molemmat vastustavat” tai ”molemmille yhdentekevä”.

Todennäköisyys, että asia on henkilölle yhdentekevä, on $1 - 0,47 - 0,32 = 0,21$.

Lasketaan vastatapahtuman \bar{A} todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= P(\text{samaa mieltä}) \\ &= P(\text{molemmat kannattavat tai molemmat vastustavat} \\ &\quad \text{tai molemmille yhdentekevä}) \\ &= P(\text{molemmat kannattavat}) + P(\text{molemmat vastustavat}) \\ &\quad + P(\text{molemmille yhdentekevä}) \\ &= 0,47 \cdot 0,47 + 0,32 \cdot 0,32 + 0,21 \cdot 0,21 \end{aligned}$$

Lasketaan tapahtuman A todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\ &= 1 - (0,47 \cdot 0,47 + 0,32 \cdot 0,32 + 0,21 \cdot 0,21) \\ &\approx 0,63 \end{aligned}$$

Vastaus

0,63

13.11

Tutkitaan tilannetta vastatapahtuman avulla. Tapahtuman A : ”mukana ainakin yksi O-veriryhmään kuuluva” vastatapahtuma on \bar{A} : ”mukana ei yhtään O-veriryhmään kuuluvaa”.

Todennäköisyys, että suomalainen ei kuulu O-veriryhmään, on $1 - 0,33 = 0,67$.

Jos valitaan n suomalaista, niin todennäköisyys, että yksikään ei ole O-veriryhmää, on $\underbrace{0,67 \cdot 0,67 \cdot \dots \cdot 0,67}_{n \text{ kappaletta}} = 0,67^n$.

Muodostetaan lauseke tapahtuman ”ainakin yksi O” todennäköisyydelle.

$$\begin{aligned} P(\text{ainakin yksi}) &= 1 - P(\text{ei yhtään}) \\ &= 1 - 0,67^n \end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, millä ihmisten määrällä n todennäköisyys on 0,99.

$$\begin{aligned} P(\text{ainakin yksi}) &= 0,99 \\ 1 - 0,67^n &= 0,99 \\ n &\approx 11,5 \end{aligned}$$

Pyöristetään ylöspäin kokonaisluvuksi, koska selvitetään todennäköisyyttä, että ainakin yksi kuuluu O-veriryhmään.

Vastaus

vähintään 12 henkeä

13.12

- a) Tapahtuma A : ”ainakin yksi punavihersokea opiskelija”
todennäköisyys kannattaa lasketa vastatapahtuman \bar{A} : ”ei yhtään punavihersokea opiskelijaa” avulla.

Poika on punavihersokea todennäköisyydellä 0,08, joten poika ei ole punavihersokea todennäköisyydellä 0,92.

Tyttö on punavihersokea todennäköisyydellä 0,006, joten tyttö ei ole punavihersokea todennäköisyydellä 0,994.

Lasketaan vastatapahtuman \bar{A} todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= P(\text{ei yhtään punavihersokea opiskelijaa}) \\ &= P(\text{ei yhtään punavihersokea tyttöä ja ei yhtään punavihersokea poikaa}) \\ &= 0,994^{15} \cdot 0,92^8 \end{aligned}$$

Lasketaan tapahtuman A todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\ &= 1 - 0,994^{15} \cdot 0,92^8 \\ &\approx 0,53 \end{aligned}$$

- b) Tapahtuman ”ainakin yksi punavihersokea tyttö ja ainakin yksi punavihersokea poika” todennäköisyys kannattaa laskea vastatapahtumien avulla.

Lasketaan tapahtuman ”ainakin yksi punavihersokea tyttö” todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{ainakin yksi punavihersokea tyttö}) \\ &= 1 - P(\text{ei yhtään punavihersokeaa tyttöä}) \\ &= 1 - 0,994^{15} \end{aligned}$$

Lasketaan tapahtuman ”ainakin yksi punavihersokea poika” todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{ainakin yksi punavihersokea poika}) \\ &= 1 - P(\text{ei yhtään punavihersokeaa poika}) \\ &= 1 - 0,92^8 \end{aligned}$$

Lasketaan tapahtuman ”ainakin yksi punavihersokea tyttö ja ainakin yksi punavihersokea poika” todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{ainakin yksi punavihersokea tyttö ja ainakin yksi punavihersokea poika}) \\ &= P(\text{ainakin yksi pvs tyttö}) \cdot P(\text{ainakin yksi pvs poika}) \\ &= 1 - 0,994^{15} \cdot 1 - 0,92^8 \\ &\approx 0,042 \end{aligned}$$

Vastaus

a) 0,53

b) 0,042

13.13

- a) Jos tapahtuma A : ”minä valehtelen joskus” ei toteudu, minä en valehtele koskaan eli puhun aina totta.

Tapahtuman A vastatapahtuma on

\bar{A} : ”minä puhun aina totta”.

- b) Jos tapahtuma B : ”kaikilla luokan oppilailla on laskin mukana” ei toteudu, ainakin yhdellä oppilaalla ei ole laskinta mukana.

Tapahtuman B vastatapahtuma on

\bar{B} : ”ainakin yhdellä luokan oppilaalla ei ole laskin mukana”.

- c) Jos tapahtuma C : ”tornin korkeus on alle 27 metriä” ei toteudu, torni on vähintään 27 metriä korkea.

Tapahtuman C vastatapahtuma on

\bar{C} : ”tornin korkeus on vähintään 27 metriä”.

- d) Jos tapahtuma D : ”laitumella olevista hevosista ainakin yksi on valkoinen” ei toteudu, yksikään hevosista ei ole valkoinen.

Tapahtuman D vastatapahtuma on

\bar{D} : ”laitumella olevista hevosista yksikään ei ole valkoinen”.

13.2

Tapahtuman A : ”opetusryhmän opiskelijoista ainakin yksi on vasenkätinen” t odennäköisyys kannattaa laskea vastatapahtuman \bar{A} : ”opetusryhmän yksikään opiskelija ei ole vasenkätinen” avulla.

Opiskelija on vasenkätinen todennäköisyydellä 0,11, joten hän ei ole vasenkätinen todennäköisyydellä $1 - 0,11 = 0,89$.

Lasketaan vastatapahtuman \bar{A} todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= P(\text{yksikään opiskelija ei ole vasenkätinen}) \\ &= P(1. \text{ ei vasenkät. ja } 2. \text{ ei vasenkät. ja } \dots \text{ ja } 27. \text{ ei vasenkät.}) \\ &= P(1. \text{ ei vasenkät.}) \cdot P(2. \text{ ei vasenkät.}) \cdot \dots \cdot P(27. \text{ ei vasenkät.}) \\ &= \underbrace{0,89 \cdot 0,89 \cdot \dots \cdot 0,89}_{27 \text{ kappaletta}} \\ &= 0,89^{27} \end{aligned}$$

Lasketaan tapahtuman A todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\ &= 1 - 0,89^{27} \\ &\approx 0,96 \end{aligned}$$

Vastaus

0,96

13.15

Tapahtuma A : ”korkeintaan toinen vioista” tarkoittaa, että esineessä on värivirhe tai valuvirhe tai esine on virheetön. Yksinkertaisempaa on laskea vastatapahtuman \bar{A} : ”esineessä on molemmat virheet” todennäköisyys.

Lasketaan vastatapahtuman \bar{A} todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(\bar{A}) &= P(\text{esineessä on molemmat virheet}) \\&= P(\text{värivirhe ja valuvirhe}) \\&= P(\text{värivirhe}) \cdot P(\text{valuvirhe}) \\&= 0,12 \cdot 0,15\end{aligned}$$

Lasketaan tapahtuman A todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\&= 1 - 0,12 \cdot 0,15 \\&= 0,98\end{aligned}$$

Vastaus

0,98

13.16

Tutkitaan tilannetta vastatapahtuman avulla. Tapahtuman A : ”ainakin yksi puhuu ruotsia äidinkielenään” vastatapahtuma on \bar{A} : ”ei yhtään ruotsia äidinkielenään puhuvaa”.

Todennäköisyys, että henkilö ei puhu ruotsia äidinkielenään, on $1 - 0,052 = 0,948$.

Jos ryhmään valitaan n jäsentä, niin todennäköisyys, että yksikään ei puhu äidinkielenään ruotsia, on $\underbrace{0,948 \cdot 0,948 \cdot \dots \cdot 0,948}_{n \text{ kappaletta}} = 0,948^n$.

Muodostetaan lauseke tapahtuman ”ainakin yksi puhuu ruotsia äidinkielenään” todennäköisyydelle.

$$\begin{aligned} P(\text{ainakin yksi}) &= 1 - P(\text{ei yhtään}) \\ &= 1 - 0,948^n \end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, millä jäsenmäärällä n todennäköisyys on 0,90.

$$\begin{aligned} P(\text{ainakin yksi}) &= 0,90 \\ 1 - 0,948^n &= 0,90 \\ n &\approx 43,1 \end{aligned}$$

Pyöristetään ylöspäin kokonaisiksi henkilöiksi, koska selvitetään todennäköisyyttä, että ainakin yksi puhuu ruotsia äidinkielenään.

Vastaus

vähintään 44 jäsentä

13.17

Henkilö saa heti yhteyden asiakaspalveluun, mikäli ainakin yksi puhelimista on vapaa. Tapahtuma A : ”ainakin yksi puhelimista on vapaa” kannattaa laskea vastatapahtuman \bar{A} : ”yksikään puhelimista ei ole vapaa” avulla.

Todennäköisyys, että yksittäinen puhelin on vapaa, on $\frac{5}{60} = \frac{1}{12}$. Puhelin ei ole vapaa todennäköisyydellä $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.

Lasketaan vastatapahtuman \bar{A} todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= P(\text{yksikään puhelimista ei ole vapaa}) \\ &= P(1. \text{ ei vapaa ja } 2. \text{ ei vapaa ja } \dots \text{ ja } 6. \text{ ei vapaa}) \\ &= P(1. \text{ ei vapaa}) \cdot P(2. \text{ ei vapaa}) \cdot \dots \cdot P(6. \text{ ei vapaa}) \\ &= \frac{11}{12} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{11}{12} \\ &= \frac{11}{12}^6 \end{aligned}$$

Lasketaan tapahtuman A todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\ &= 1 - \frac{11}{12}^6 \\ &\approx 0,41 \end{aligned}$$

Vastaus

0,41

13.18

Tutkitaan tilannetta vastatapahtuman avulla. Tapahtuman A : ”jää ainakin kerran kiinni” vastatapahtuma on \bar{A} : ”ei jää kertaakaan kiinni”.

Todennäköisyys, että henkilö ei jää kiinni, on $1 - \frac{1}{300} = \frac{299}{300}$.

Jos henkilö matkustaa n kertaa, niin todennäköisyys, että hän ei jää kiinni,

$$\text{on } \underbrace{\frac{299}{300} \cdot \frac{299}{300} \cdot \dots \cdot \frac{299}{300}}_{n \text{ kappaletta}} = \frac{299}{300}^n.$$

Muodostetaan lauseke tapahtuman ”jää ainakin kerran kiinni” todennäköisyydelle.

$$P(\text{ainakin kerran}) = 1 - P(\text{ei yhtään})$$

$$= 1 - \frac{299}{300}^n$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, millä matkustusmäärällä n todennäköisyys on 0,50.

$$P(\text{ainakin kerran}) = 0,50$$

$$1 - \frac{299}{300}^n = 0,50$$

$$n \approx 207,6$$

Pyöristetään alaspäin kokonaisiksi matkustuserroista, koska selvitetään tilannetta, jossa todennäköisyys on alle 50 %.

Vastaus

korkeintaan 207 kertaa

13.19

Tutkitaan tilannetta vastatapahtuman avulla. Tapahtuman A : ”ainakin yksi rattijuoppo saadaan kiinni” vastatapahtuma on \bar{A} : ”yhtään rattijuoppoa ei saada kiinni”.

Todennäköisyys, että puhallutettava henkilö on rattijuoppo, on

$$1 - \frac{1}{770} = \frac{769}{770}.$$

Jos puhallutetaan n kuljettajaa, niin todennäköisyys, että yksikään ei ole

rattijuoppo, on $\underbrace{\frac{769}{770} \cdot \frac{769}{770} \cdot \dots \cdot \frac{769}{770}}_{n \text{ kappaletta}} = \frac{769}{770}^n$.

Muodostetaan lauseke tapahtuman ”ainakin yksi rattijuoppo” todennäköisyydelle.

$$P(\text{ainakin yksi}) = 1 - P(\text{ei yhtään})$$

$$= 1 - \frac{769}{770}^n$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, millä puhallutettujen määrällä n todennäköisyys on 0,85.

$$P(\text{ainakin yksi}) = 0,85$$

$$1 - \frac{769}{770}^n = 0,85$$

$$n \approx 1459,8$$

Vastaus

vähintään 1460 kuljettajaa

13.20

- a) Yksittäinen painovirhe tulee löydettyksi, mikäli vähintään yksi lukija löytää sen. Tapahtuma A : ”ainakin yksi lukija löytää virheen”
todennäköisyys kannattaa lasketa vastatapahtuman \bar{A} : ”yksikään lukija ei löydä virhettä” avulla.

Lukijat eivät löydä yksittäistä virhettä todennäköisyyksillä 0,40; 0,30 ja 0,20.

Lasketaan vastatapahtuman \bar{A} : ”yksikään lukija ei löydä virhettä” todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(\bar{A}) &= P(\text{yksikään ei löydä virhettä}) \\&= P(1. \text{ ei virhettä ja } 2. \text{ ei virhettä ja } 3. \text{ ei virhettä}) \\&= P(1. \text{ ei virhettä}) \cdot P(2. \text{ ei virhettä}) \cdot P(3. \text{ ei virhettä}) \\&= 0,40 \cdot 0,30 \cdot 0,20\end{aligned}$$

Lasketaan tapahtuman A todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\&= 1 - 0,40 \cdot 0,30 \cdot 0,20 \\&\approx 0,98\end{aligned}$$

- b) Tapahtuma ”kaikki virheet löydetään” tarkoittaa, että 1. virhe löydetään ja 2. virhe löydetään ja ... ja 10. virhe löydetään.

$P(\text{kaikki virheet löydetään})$

$= P(1. \text{ löydetään ja } 2. \text{ löydetään ja } \dots \text{ ja } 10. \text{ löydetään})$

$= P(1. \text{ löydetään}) \cdot P(2. \text{ löydetään}) \cdot \dots \cdot P(10. \text{ löydetään})$

$= (1 - 0,40 \cdot 0,30 \cdot 0,20) \cdot (1 - 0,40 \cdot 0,30 \cdot 0,20) \cdot \dots \cdot (1 - 0,40 \cdot 0,30 \cdot 0,20)$

$= (1 - 0,40 \cdot 0,30 \cdot 0,20)^{10}$

$\approx 0,78$

- c) Tapahtuma B : ”ainakin yksi virhe jää löytymättä” todennäköisyys kannattaa lasketa vastatapahtuman \bar{B} : ”kaikki virheet löydetään” avulla.

Vastatapahtuman \bar{B} todennäköisyys

$P(\bar{B}) = P(\text{kaikki virheet löydetään}) = (1 - 0,40 \cdot 0,30 \cdot 0,20)^{10}$

Lasketaan tapahtuman B todennäköisyys.

$P(B) = 1 - P(\bar{B})$

$= 1 - (1 - 0,40 \cdot 0,30 \cdot 0,20)^{10}$

$\approx 0,22$

Vastaus

a) 0,98

b) 0,78

c) 0,22

13.21

Tapahtuma A : ”saa ainakin kaksi voittoa” tarkoittaa, että voittoja saadaan kaksi, kolme tai neljä. Yksinkertaisempaa on laskea vastatapahtuman \bar{A} : ”saadaan korkeintaan yksi voitto” todennäköisyys.

Tapahtuma ”saadaan korkeintaan yksi voitto” koostuu neljästä erillisestä tapahtumasta:

”ei saada yhtään voittoa” = ”E E E E E”

”saadaan voitto vain 1. arvasta” = ”V E E E E”

” saadaan voitto vain 2. arvasta” = ”E V E E E”

” saadaan voitto vain 3. arvasta” = ”E E V E E”

” saadaan voitto vain 4. arvasta” = ”E E E V E”

” saadaan voitto vain 5. arvasta” = ”E E E E V”

Todennäköisyys, että ei saada yhtään voittoa, on

$$P(E E E E E) = 0,75 \cdot 0,75 \cdot 0,75 \cdot 0,75 \cdot 0,75 = 0,75^5.$$

Todennäköisyys, että saadaan voitto vain 1. arvasta, on

$$P(V E E E E) = 0,25 \cdot 0,75 \cdot 0,75 \cdot 0,75 \cdot 0,75 = 0,25 \cdot 0,75^4.$$

Sama todennäköisyys on myös saada voitto vain 2. arvasta, 3. arvasta, 4. arvasta tai 5. arvasta.

Lasketaan vastatapahtuman \bar{A} todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(\bar{A}) &= P(\text{saadaan korkeintaan yksi voitto}) \\&= P(\text{E E E E E tai V E E E E tai E V E E E tai E E V E E} \\&\quad \text{tai E E E V E tai E E E E V}) \\&= P(\text{E E E E E}) + P(\text{V E E E E}) + P(\text{E V E E E}) + P(\text{E E V E E}) \\&\quad + P(\text{E E E V E}) + P(\text{E E E E V}) \\&= 0,75^5 + 5 \cdot 0,25 \cdot 0,75^4\end{aligned}$$

Lasketaan tapahtuman A todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\&= 1 - 0,75^5 + 5 \cdot 0,25 \cdot 0,75^4 \\&\approx 0,37\end{aligned}$$

Vastaus

0,37

13.22

Tapahtuman A : ”tarvitaan vähemmän kuin kuusi heittoa” todennäköisyys kannattaa laskea vastatapahtuman \bar{A} : ”tarvitaan vähintään kuusi heittoa” avulla.

Vastatapahtuma \bar{A} : ”tarvitaan vähintään kuusi heittoa” tarkoittaa, että viidellä ensimmäisellä heitolla heitetään jokin muu silmäluku kuin kuutonen. Todennäköisyys, että heitolla tulee jokin muu silmäluku kuin kuutonen, on $\frac{5}{6}$.

Lasketaan vastatapahtuman \bar{A} todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= P(\text{viidellä heitolla ei saada kuutosta}) \\ &= P(1. \text{ ei ole } 6 \text{ ja } 2. \text{ ei ole } 6 \text{ ja } \dots \text{ ja } 5. \text{ ei ole } 6) \\ &= P(1. \text{ ei ole } 6) \cdot P(2. \text{ ei ole } 6) \cdot \dots \cdot P(5. \text{ ei ole } 6) \\ &= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \\ &= \frac{5^5}{6^5} \end{aligned}$$

Lasketaan tapahtuman A todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\ &= 1 - \frac{5^5}{6^5} \\ &\approx 0,598 \end{aligned}$$

Vastaus
0,598

13.23

Tapahtuman A : ”heitettäessä kahta noppaa 24 kertaa saadaan ainakin yksi kuutospari” kannattaa laskea vastatapahtuman \bar{A} : ”heitettäessä kahta noppaa 24 kertaa ei saada yhtään kuutosparia” avulla.

Lasketaan ensin tapahtuman B : ”kahden nopan heitossa saadaan kuutospari” todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(B) &= P(1. \text{ kuutonen ja } 2. \text{ kuutonen}) \\&= P(1. \text{ kuutonen}) \cdot P(2. \text{ kuutonen}) \\&= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}\end{aligned}$$

Lasketaan sitten vastatapahtuman \bar{B} : ”kahden nopan heitossa ei saada kuutosparia” todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(\bar{B}) &= 1 - P(B) \\&= 1 - \frac{1}{36} \\&= \frac{35}{36}\end{aligned}$$

Lasketaan seuraavaksi vastatapahtuman \bar{A} : ”heitettäessä kahta noppaa 24 kertaa ei saada yhtään kuutosparia” todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(\bar{A}) &= P(\bar{B})^{24} \\&= \left(\frac{35}{36}\right)^{24}\end{aligned}$$

Lasketaan vielä lopuksi tapahtuman A : ”heitettäessä kahta noppaa 24 kertaa saadaan ainakin yksi kuutospari” todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\&= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \\&\approx 0,49\end{aligned}$$

Tapahtuman ”heitettäessä kahta noppaa 24 kertaa saadaan ainakin yksi kuutospari” puolesta ei kannata lyödä vetoa, koska todennäköisyys on alle 0,5.

Vastaus
ei kannata